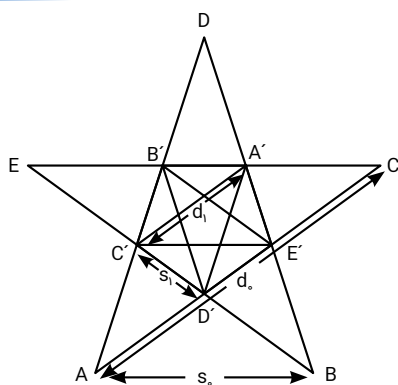




خسرو داودی و آرش رستگار قسمت دوم: مجموعه پروژه‌های کوچک برای ریاضی دانان کوچک عددهای گویا و گنگ



فیثاغورسیان ستاره پنج‌پر را که از قطرهای یک پنج‌ضلعی منتظم درست می‌شود، به‌عنوان نشان‌واره (لوگوی) مدرسه خود به کار می‌بردند. البته مفهوم نشان‌واره در آن زمان وجود نداشت. ستاره پنج‌پر یک نماد فلسفی محسوب می‌شود. شاید به همین دلیل بود که به مطالعه خصوصیات هندسی این شکل پرداختند. کمی این شکل را مطالعه کنید و ببینید چه چیزهایی را می‌توانید درباره آن ثابت کنید.

تا نمایش‌های دهدهی را به عنوان یک باز فرمول‌بندی از عددها در نظر بگیریم. توجه داشته باشید که نمایش دهدهی یک نماد است و برابر یک عدد نیست.

برای آنکه به:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1/618033988749$$
 یک عدد نسبت دهیم، باید آن را به صورت یک مجموعه نامتناهی بسط دهیم:

$$\varphi = 1 + 6 \times 10^{-1} + 1 \times 10^{-2} + 8 \times 10^{-3} + 0 \times 10^{-4} + 3 \times 10^{-5} + \dots$$

$$= 1 + 0/6 + 0/01 + 0/008 + 0/0003 + \dots$$
 حاصل این مجموع به نقطه یا عددی روی محور نزدیک‌تر و نزدیک‌تر می‌شود که همان نقطه متناظر با φ یا عدد طلایی است.

پس در قدم اول، همه بسط‌های اعشاری ممکن را یک عدد می‌گیریم. هر عددی که تناوب در بسط اعشاری آن ظاهر شود، گویاست. مثلاً اگر:

$$0/123123... = 0/123 = x$$

$$1000x = 123 + x$$

پس $x = \frac{123}{999}$ که البته می‌توان این کسر را ساده کرد. می‌توان دید بسط اعشاری هر عدد گویا هم از جایی به بعد تناوبی است. پس بسط‌های اعشاری از جایی به بعد همان عددهای گویا هستند. توجه کنید که: $1/2 = 1/20 = 0/120$.

مسئله ۱. دو بسط اعشاری را چنان زیر هم بنویسید که یکان زیر یکان، دهگان زیر دهگان، دهم زیر دهم، صدم زیر صدم و مانند آن باشد. الگوریتم جمع عددها با بسط متناهی را به جمع عددها با بسط نامتناهی توسعه دهید. سپس نشان دهید عددهایی که از جایی به بعد بسط اعشاری متناوب دارند، نسبت به عمل جمع بسته هستند. یعنی، اینکه جمع دو عدد گویا باز هم عددی گویاست را به زبان جدید ثابت کنید.

$$\begin{aligned} \Rightarrow a &= 5k \\ \Rightarrow a^2 &= 5^2 k^2 \\ \Rightarrow 5^2 k^2 &= 5b^2 \\ \Rightarrow 5k^2 &= b^2 \end{aligned}$$

پس b^2 بر ۵ بخش‌پذیر است و می‌نویسیم: $5|b^2$
 پس b بر ۵ بخش‌پذیر است و می‌نویسیم: $5|b$
 که این با نسبت به هم اول بودن a و b تناقض دارد. یعنی ما گنگ بودن $\sqrt{5}$ را با فرض خلاف که به تناقض رسید، ثابت کردیم. داستان چنین می‌گوید که هیپاسوس این نسبت گنگ را روی کشتی پیدا کرد و فیثاغورسیان به گناه پیدا کردن یک عدد که ناگویا بود، او را در دریا غرق کردند. چرا که این برخلاف باور آنان بود که همه عددها گویا هستند. داستان دیگری می‌گوید که او را تبعید کردند.

پیداشدن عددهای گنگ برخلاف باور فلسفی فیثاغورسیان بود که عددها و هندسه دو علم جدایی‌ناپذیرند. نگاهی که بعدها ارسطو کاملاً خلاف آن را ادعا کرد: «ریاضیات مقادیرهای گسسته و ریاضیات مقادیرهای پیوسته را نباید با هم مخلوط کرد.» نگاه فلسفی ارسطو بعدها توسط خوارزمی در هم شکست. چرا که خوارزمی روش جبری را ارائه کرد که برای مقادیرهای پیوسته و گسسته، هر دو به کار می‌رفت.

حال این سؤال را مطرح می‌کنیم که چگونه عددهای گنگ را بسازیم. در واقع سؤال این است که چگونه با داشتن عددهای گویا، عددهای گنگ را بسازیم. یک پاسخ ممکن، استفاده از بازفرمول‌بندی است. نمایش دهدهی یک عدد گویا همیشه از جایی به بعد تناوبی است و نمایش دهدهی یک عدد گنگ هرگز به تناوب ختم نمی‌شود. می‌توانیم همین نکته را دست‌مایه کنیم

آیا توجه کردید که $AB=BA'$ ، یا اینکه نسبت‌های زیر برابرند:

$$\frac{AC}{AB'} = \frac{AB'}{A'C'} = \frac{A'C'}{B'C'}$$

این نسبت را «نسبت طلایی» می‌نامند که برابر $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ یا تقریباً $1/618033988749$ است. هیپاسوس در حدود سال ۴۵۰ ق.م نشان داد که این نسبت نمی‌تواند عددی گویا باشد. او از مشابه هندسی الگوریتم اقلیدس برای تقسیم کمک گرفت تا نشان دهد $\frac{d_i}{s_i}$ عددی گنگ است. اگر قطر و ضلع پنج‌ضلعی داخلی را d_1 و s_1 ، و قطر و ضلع پنج‌ضلعی داخلی بعدی را d_2 و s_2 بگیریم و همین‌طور تا آخر، داریم:

$$\begin{aligned} d_2 - s_2 &= d_1 < s_1 \\ s_2 - d_2 &= s_1 < d_1 \\ d_1 - s_1 &= d_2 < s_2 \\ s_1 - d_1 &= s_2 < d_2 \\ d_2 - s_2 &= d_3 < s_3 \\ s_2 - d_2 &= s_3 < d_3 \end{aligned}$$

پس در واقع هیپاسوس نشان داد الگوریتم اقلیدس هرگز تمام نمی‌شود و $\frac{d_i}{s_i}$ را نمی‌توان به صورت یک عدد گویا نمایش داد.

معمول این است که برای ساده‌تر شدن فهم عددهای گنگ از روش جبری استفاده می‌کنند. برای مثال اگر بخواهیم نشان دهیم عدد طلایی $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ عددی گنگ است، کافی است نشان دهیم $\sqrt{5}$ عددی گنگ است. فرض کنیم - اگر چه فرضی محال - که داشته باشیم: $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ که در آن a و b عددهای طبیعی و نسبت به هم اول هستند. در این صورت داریم: $a^2 = 5b^2$
 پس a^2 بر ۵ بخش‌پذیر است و می‌نویسیم: $5|a^2$
 پس a بر ۵ بخش‌پذیر است و می‌نویسیم: $5|a$

مسئله ۲. ضرب دو بسط اعشاری را نیز باید تعریف کرد. همان روشی را که برای ضرب دو بسط اعشاری متناهی داریم به بسط‌های اعشاری نامتناهی توسعه دهید. برای این کار باید هر بسط را مانند بالا به صورت یک مجموع از توان‌های مثبت و منفی ۱۰ نوشت که ضرایب تکریمی دارند. سپس نشان دهید عددهایی که از جایی به بعد بسط اعشاری متناوب دارند، نسبت به عمل ضرب هم بسته هستند. یعنی اینکه ضرب دو عدد گویا باز هم عددی گویاست را به زبان جدید ثابت کنید.

پروژه‌های انجام‌شده خود را با قالب «ورد» (word) حروف‌نگاری کنید و برای ما بفرستید. بهترین پروژه‌ها از طریق رمزینه پاسخ سریع (کیوآر کد) در شماره آتی چاپ خواهند شد.



برای مطالعه پروژه
مقدمه‌ی نسیمی
رمزینه را پویش
کنید.

مسئله ۳. دو بسط اعشاری از دو سر نامتناهی را چنان زیر هم بنویسید که یکان زیر یکان، دهگان زیر دهگان، دهم زیر دهم و صدم زیر صدم، و مانند آن باشد. الگوریتم جمع عددها با بسط متناهی را به جمع بسط‌های اعشاری دو سر نامتناهی تعمیم دهید. آیا با این کار، جمع دو عدد گویا با بسط از دو طرف متناوب، دوباره عددی گویا خواهد بود؟ به عبارت دیگر، آیا جمع عددهای گویا با فرمول‌بندی جدید، بر عددهایی که همان بسط‌های از دو سر نامتناهی باشند و جمع آن‌ها که در بالا تعریف کردیم، منطبق است؟

آیا همین کار را می‌توان با ضرب نمایش‌های دهدهی دو سرنامتناهی انجام داد؟ آیا دوباره ضرب دو عدد گویا، عددی گویاست؟

یادتان باشد که یک بسط از دو نامتناهی، متناظر با یک مجموع نامتناهی از توان‌های مثبت و منفی ۱۰ است. جمع توان‌های مثبت ۱۰ هم که همیشه نهایت ندارد. پس ما با این جمع توان‌ها که وابسته به نماد نمایش دهدهی است، کار نمی‌کنیم. ما نمایش‌های دهدهی را به صورت نمادین عدد می‌گیریم؛ عددهایی که گاهی متناهی و گاهی نامتناهی هستند و برای آن‌ها جمع و ضرب تعریف می‌کنیم. توجه کنید که ظاهراً قرار است $\frac{123}{10}$ و $\frac{123}{10}$ هر دو عددهایی مثبت باشند. اما دیدیم که محاسبه نشان داد $\frac{123}{10}$ یک عدد گویای منفی است. حال جای آن دارد که دوباره از خودمان بپرسیم: «آیا عدد همین نمادهاست یا فراتر از نمادهاست؟» اگر می‌خواستیم فقط با نمادها بازی کنیم، گاهی مجبور می‌شدیم حرف‌های عجیبی را باور کنیم.

توجه داشته باشید که اگر قرار دهیم: $\frac{10}{9} = x$ ، آنگاه: $10x = 9 + x$. لذا: $x = 1$ که نشان می‌دهد: $\frac{10}{9} = 1$. پس گاهی نمایش دهدهی عددها یگانه نیست، اما می‌توان ثابت کرد، تنها وقتی ۹ از جایی به بعد رقم تکرارشدنی است، این نمایش یگانه نیست. این نکته را هم در ساختن عددهای حقیقی با بسط‌های اعشاری در نظر داشته باشید.

اما حالا یک سؤال چالشی را مطرح می‌کنیم. اگر همان‌طور که بسط اعشاری را اجازه داریم از سمت راست تا بی‌نهایت ادامه دهیم، به ما اجازه می‌دادند آن را از سمت چپ هم تا بی‌نهایت ادامه دهیم چه اتفاقی می‌افتاد؟

توجه کنید که: $x = \overline{123123123} = 123123123 \dots$

از آنجا: $\frac{10}{1001}x = x + \frac{10}{123}$

زیرا: $\frac{10}{1001}x = \frac{123}{123} / \frac{1001}{123}$

پس: $\frac{10}{999}x = -\frac{10}{123}$

و آنگاه: $x = \frac{-\frac{10}{123}}{\frac{10}{999}} = \frac{-123}{999}$

پس اگر نمایش نامتناهی ما از سمت چپ متناوب باشد، به ما عددهای گویای منفی را می‌دهد!

آیا این موضوع شما را کنجکاو نمی‌کند؟